第 50 卷 第 2 期
2011 年 3 月

中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 50 No. 2
Mar. 2011

四维中心仿射几何中由曲线运动导出的高维可积方程*

李艳艳
（咸阳师范学院数学与信息科学学院，陕西 咸阳 712000）

摘　要：讨论了四维中心仿射几何中由 2 + 1 维的曲线运动导出的高维可积方程。这种曲线运动是通过对四维中心仿射几何中 1 + 1 维的曲线运动公式增加一个额外的空间变量 y 得到的，它等价于四维中心仿射几何中的曲面运动。证明了 2 + 1 维的可积破裂孤立子方程来自于四维中心仿射几何中的这种曲线运动。不仅将已有的三维中心仿射几何中的这种曲线运动推广到了四维中心仿射几何，还丰富了对 2 + 1 维的破裂孤立子方程的几何解释。

关键词：中心仿射几何；可积方程；不变曲线流；破裂孤立子方程

中图分类号：O175.29　**文献标志码：**A　**文章编号：**0529 - 6579（2011）02 - 0025 - 03

Higher Dimensional Integrable Equation Induced by Motion of Curves in Four-Dimensional Centro-Affine Geometry

LI Yanyan
（Institute of Mathematics and Information Science, Xianyang Normal University, Xianyang 712000, China）

Abstract: The higher-dimensional integrable equation induced by the 2 + 1-dimensional motion of curves in four-dimensional centro-affine geometry is discussed. The curves motion is obtained by adding an extra space variable y to the 1 + 1-dimensional curves motion in four-dimensional centro-affine geometry, which is equivalent to the surface motion in four-dimensional centro-affine geometry. It is shown that the 2 + 1-dimensional breaking soliton equation arises from such motion in four-dimensional centro-affine geometry. The result not only extends the existing curve motion in three-dimensional centro-affine geometry to four-dimensional centro-affine geometry, but also enriches geometric explanation of the 2 + 1-dimensional breaking soliton equation.

Key words: centro-affine geometry; integrable equation; invariant curve flow; breaking soliton equation

某种几何中的曲线曲面运动与非线性演化方程密切相关。很多学者已经从一些几何中的曲线曲面运动中得出了许多可积方程，从而为这些可积方程提供了新的几何解释，极大地丰富了可积方程的几何背景。例如，Hasimoto[1] 从不可伸缩旋线运动中得到了可积的非线性 Schrödinger 方程。Goldstein 等[2]把 mKdV 方程和它的梯队与欧氏平面中的不可伸缩的曲线运动联系起来。Doliwa 等[3]发现非线性 Schrödinger 梯队和复 mKdV 方程产生于 $S^3(R)$ 上的曲线运动，这里的半径 R 起谱参数的作用。Nakayama 等[4]通过考虑欧氏平面中的非局部曲线运动得到了 sine-Gordon 方程。Schief 等[5]研究了具有常曲率或挠率的副法线的曲线运动，获得了延拓的 Harry-Dym 方程和 sine-Gordon 方程。屈长征等[6-7]系统地讨论了 Klein 几何中的不可伸缩曲线运动，证明了很多可积方程产生于这种曲线运动。Beffa 等[8]研究了黎曼流形中不可伸缩的曲线运动，

* 收稿日期：2010 - 03 - 09
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10671156）；陕西省教育厅自然科学基金资助项目（2010JK893）
作者简介：李艳艳（1983 年生），女，讲师；E-mail：muzilyy@163.com

建立了不变曲线流和相应的可积方程间的对应。

Myrzakulov 等[7,9-12]通过对三维欧氏空间，中心仿射空间，仿射空间以及高维的相似空间中的1+1维的空间曲线运动公式赋予一个额外的空间变量γ而得到相应空间中的2+1维的空间曲线运动公式，同时获得2+1维的 Ishimori，Myrzakulov I，MyrzakulovIII 方程，2+1维的等距 Heisenberg 铁磁模型，2+1维的 Schrödinger 和2+1维的可积浅水波等方程。

与欧氏几何等经典的几何相比，关于中心仿射几何的讨论是很少的，只有在一些仿射几何的书中我们才可以找到关于中心仿射几何的介绍。近来，屈长征等[6-7]研究了2-维和3-维中心仿射几何中的曲线曲面运动，但是对更高维的曲线曲面运动没有进行研究。在本文中我们对四维中心仿射几何中的曲面运动进行研究，并得到了2+1维的破裂孤立子方程。

四维中心仿射几何的等距变换是由特殊的线性变换$SL(4,R)$得到的线性变换。对于一般的曲线γ，只要满足沿着曲线$[\gamma,\gamma^{(1)}(p),\gamma^{(2)}(p),\gamma^{(3)}(p)]\neq 0$，我们就可以用一个特殊的参数$s$重新参数化，使得在四维中心仿射几何中，曲线的弧长由下式给出

$$ds=[\gamma,\gamma^{(1)}(p),\gamma^{(2)}(p),\gamma^{(3)}(p)]^{1/6}dp$$

其中p是任意的参数，曲线的伏雷内标架为$\{\gamma,\gamma^{(1)}(s),\gamma^{(2)}(s),\gamma^{(3)}(s)\}$。

在四维中心仿射几何中，曲线的伏雷内公式可以写成

$$\begin{pmatrix}\gamma\\ \gamma^{(1)}\\ \gamma^{(2)}\\ \gamma^{(3)}\end{pmatrix}_s=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\ \kappa_1&\kappa_2&\kappa_3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\ \gamma^{(1)}\\ \gamma^{(2)}\\ \gamma^{(3)}\end{pmatrix} \tag{1}$$

这里的$\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3$是四维中心仿射几何的曲率。

四维中心仿射几何中的不变曲线流由下式控制

$$\gamma_t=E\gamma+F\gamma^{(1)}+G\gamma^{(2)}+H\gamma(3) \tag{2}$$

其中E，F，G，H是曲线的速率，依赖于四维中心仿射曲率$\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3$。

由方程（1）和（2），我们可以得出四维中心仿射几何的时间演化为

$$\begin{pmatrix}\gamma\\ \gamma^{(1)}\\ \gamma^{(2)}\\ \gamma^{(3)}\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}E&F&G&H\\E_1&F_1&G_1&H_1\\E_2&F_2&G_2&H_2\\E_3&F_3&G_3&H_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\ \gamma^{(1)}\\ \gamma^{(2)}\\ \gamma^{(3)}\end{pmatrix} \tag{3}$$

其中$E,F,G,H,E_i,F_i,G_i,H_i,i=1,2,3$是依赖于曲线的曲率$\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3$及其导数的待定函数。

由相容性条件$\partial_s\partial_t=\partial_t\partial_s$，我们可以得到下列的方程组

$$\begin{gathered}E=-3/2F_s-G_{ss}-1/2\kappa_3G-1/4H_{sss}-\\5/4\kappa_3H_s-3/4(\kappa_{3s}+\kappa_2)H,\\E_1=E_s+\kappa_1H,\\F_1=E+F_s+\kappa_2H,\\G_1=F+G_s+\kappa_3H,\\H_1=G+H_s,\\E_2=E_{1s}+\kappa_1H_1,\\F_2=E_1+F_{1s}+\kappa_2H_1,\\G_2=F_1+G_{1s}+\kappa_3H_1,\\H_2=G_1+H_{1s},\\E_3=E_{2s}+\kappa_1H_2,\\F_3=E_2+F_{2s}+\kappa_2H_2,\\G_3=F_2+G_{2s}+\kappa_3H_2,\\H_3=G_2+H_{2s}\end{gathered}$$

以及四维中心仿射曲率$\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3$所满足的系统

$$\begin{pmatrix}\kappa_1\\ \kappa_2\\ \kappa_3\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}L&M&N\\L_1&M_1&N_1\\L_2&M_2&N_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F\\G\\H\end{pmatrix} \tag{4}$$

其中

$$\begin{gathered}L=-3/2\partial_s^5+3/2\kappa_3\partial_s^3+3/2\kappa_2\partial_s^2+4\kappa_1\partial_s+\kappa_{1s},\\M=-\partial_s^6+1/2\kappa_3\partial_s^4-(2\kappa_{3s}-\kappa_2)\partial_s^3-\\(3\kappa_{3ss}-1/2\kappa_3^2-6\kappa_1)\partial_s^2-\\(2\kappa_{3sss}-4\kappa_{1s}-\kappa_3\kappa_{3s}-1/2\kappa_2\kappa_3)\partial_s-1/2\kappa_{3ssss}+\\1/2\kappa_3\kappa_{3ss}+\kappa_{1ss}+1/2\kappa_2\kappa_{3s},\\N=-1/4\partial_s^7+\kappa_3\partial_s^5-(23/4\kappa_{3s}+1/2\kappa_2)\partial_s^4-\\(21/2\kappa_{3ss}+3\kappa_{2s}-4\kappa_1-5/4\kappa_3^2)\partial_s^3-\\(19/2\kappa_{3sss}+9/2\kappa_{2ss}-6\kappa_{1s}-13/4\kappa_3\kappa_{3s}-2\kappa_2\kappa_3)\partial_s^2-\\(17/4\kappa_{3ssss}+3\kappa_{2sss})-11/4\kappa_3\kappa_{3ss}-4\kappa_{1ss}-3/2\kappa_3\kappa_{2s}-\\2\kappa_2\kappa_{3s}-2\kappa_1\kappa_3-3/4\kappa_2^2)\partial_s-3/4\kappa_{3sssss}-\\3/4\kappa_{2ssss}+\kappa_{1sss}+3/4\kappa_3\kappa_{3sss}+3/4\kappa_2\kappa_{3ss}+\\3/4\kappa_3\kappa_{2ss}+3\kappa_1\kappa_{3s}+3/4\kappa_2\kappa_{2s},\\L_1=-5\partial_s^5+2\kappa_3\partial_s^2+3\kappa_2\partial_s+\kappa_{2s},\\M_1=-4\partial_s^5-6(\kappa_{3s}-\kappa_2)\partial_s^2-\\(6\kappa_{3ss}-4\kappa_{2s}-4\kappa_1-\kappa_3^2)\partial_s-\\2\kappa_{3sss}+\kappa_{2ss}+2\kappa_{1s}+\kappa_3\kappa_{3s},\\N_1=-\partial_s^6-9/2\kappa_3\partial_s^4-(18\kappa_{3s}-\kappa_2)\partial_s^3-\\(24\kappa_{3ss}+3\kappa_{2s}-6\kappa_1-5/2\kappa_3^2)\partial_s^2-\\(14\kappa_{3sss}+5\kappa_{2ss}-8\kappa_{1s}-4\kappa_3\kappa_{3s}-7/2\kappa_2\kappa_3)\partial_s-3\kappa_{3ssss}-\\2\kappa_{2sss}+3/2\kappa_3\kappa_{3ss}+3\kappa_{1ss}+3\kappa_2\kappa_{3s}+3/2\kappa_{2s}\kappa_3,\\L_2=-5\partial_s^3+2\kappa_3\partial_s+\kappa_{3s},\\M_2=-5\partial_s^4+2\kappa_3\partial_s^2-(2\kappa_{3s}-3\kappa_2)\partial_s-2\kappa_{3ss}+2\kappa_{2s},\end{gathered}$$

$$N_2 = -3/2\partial_s^5 - 7/2\kappa_3\partial_s^3 - (27/2\kappa_{3s} - 3/2\kappa_2)\partial_s^2 - (25/2\kappa_{3ss} + \kappa_{2s} - 2\kappa_3^2 - 4\kappa_1)\partial_s - 7/2\kappa_{3sss} - 3/2\kappa_{2ss} + 3\kappa_{1s} + 3\kappa_3\kappa_{3s}$$

为了将四维中心仿射几何中 1 + 1 维的曲线运动公式推广到 2 + 1 维，我们对四维中心仿射几何中的曲线运动公式增加一个额外的空间变量 y。由于这种曲线运动的变量之间的相容性条件满足曲面的高斯 - 科达齐 - 麦因纳尔迪公式，因此我们也把这种曲线运动称为是曲面运动。

我们假定四维中心仿射几何中的标架向量的 y 演化为

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma^{(1)} \\ \gamma^{(2)} \\ \gamma^{(3)} \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} e & f & g & h \\ e_1 & f_1 & g_1 & h_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 & h_2 \\ e_3 & f_3 & g_3 & h_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma^{(1)} \\ \gamma^{(2)} \\ \gamma^{(3)} \end{pmatrix}$$

其中 $e,f,g,h,e_i,f_i,g_i,h_i,i = 1,2,3$ 是依赖于曲线的曲率 $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3$ 的待定函数。

变量 s 和 y 之间的相容性条件给出了下面的方程组

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} L & M & N \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \tag{5}$$

这里的 $L,M,N,L_i,M_i,N_i,i = 1,2$ 如上。

同样地，变量 y 和 t 之间的相容性条件可以导出下列方程组

$$\begin{aligned} f_t &= F_y + fE - eF + f_1F - fF_1 + f_2G - gF_2 + f_3H - hF_3, \\ g_t &= G_y + gE - eG + g_1F - fG_1 + g_2G - gG_2 + g_3H - hG_3, \\ h_t &= H_y + hE - eH + h_1F - fH_1 + h_2G - gH_2 + h_3H - hH_3 \end{aligned} \tag{6}$$

方程组（4） - （6）不是完全独立的。

令 $G = 0, H = 0, \kappa_2 = \kappa_{3s}, \kappa_1 = 9\alpha + 3/2\beta_{ss}, \kappa_3 = 5\beta, F = -\partial_s^{-1}\beta_y$

我们就得到了四维中心仿射曲率所满足的演化系统

$$\begin{aligned} \alpha_t &= -\alpha_s\partial_s^{-1}\beta_y - 4\alpha\beta_y - 1/2\beta\beta_{yss}, \\ \beta_t &= \beta_{yss} - 2\beta\beta_y - \beta_s\partial_s^{-1}\beta_y \end{aligned}$$

引入变换 $\beta = -2u_s$ 我们就得到了

$$u_{st} = u_{sssy} + 4u_su_{sy} + 2u_{ss}u_y$$

这是可积的破裂孤立子方程，我们可以按照逆散射的方法求它的解。

参考文献：

[1] HASIMOTO H. A soliton on a vortex filament [J]. J Fluid Mech, 1972, 51: 477 - 485.

[2] GOLDSTEIN R E, PETRICH D M. The Korteweg-de Vries hierarchy as dynamics of closed curves in the plane [J]. Phys Rev Lett, 1991, 67: 3203 - 3206.

[3] DOLIWA A, SANTINI P M. An elementary geometric characterization of the integrable motions of a curve [J]. Phys Lett A, 1994, 85: 373 - 384.

[4] NAKAYAMA K, SEGUR H, WADATI M. Integrability and the motion of curves [J]. Phys Rev Lett, 1992, 69: 2603 - 2606.

[5] SCHIEF W K, ROGERS C. Binormal motion of curves of constant curvature and torsion [J]. Generation of soliton surfaces, Pron Roy Soc Lond A, 1999, 455: 3163 - 3188.

[6] CHOU K S, QU C Z. Integrable motions of space curves in affine geometry [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2002, 14: 29 - 44.

[7] QU C Z, ZHANG S L. Motion of curves and surfaces in affine geometry [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 20: 1013 - 1019.

[8] BEFFA G M, SANDERS J A, WANG J P. Integrable systems in three-dimensional Riemannian geometry [J]. J Nonlin Sci, 2002, 12: 143 - 167.

[9] MYRZAKULOV R, VIJAYALAKSHMI S, NUGMANOVA G N, et al. A (2 + 1)-dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterpart, solitons and localized coherent structures [J]. Phys Lett A, 1997, 233: 391 - 396.

[10] LI Y Y, QU C Z. Higher-dimensional integrable systems induced by motions of curves in affine geometries [J]. Chinese Physics Letters, 2008, 25(6): 1931 - 1934.

[11] QU C Z, LI Y Y. Higher-dimensional integrable systems arising from motions of curves on $S^2(R)$ and $S^3(R)$ [J]. Communications in Theoretical Physics, 2008, 50(4): 841 - 843.

[12] QU C Z, LI Y Y. Deformation of surfaces induced by motions of curves in higher-dimensional similarity geometries [J]. The Methods and Applications of Analysis, 2007, 14(3): 273 - 286.